

1) Formule de calcul prescurtat

$$(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2$$

$$a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$$

$$(a \pm b)^3 = a^3 \pm 3a^2b + 3ab^2 \pm b^3$$

$$a^3 \pm b^3 = (a \pm b)(a^2 \mp ab + b^2)$$

$$(a + b + c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2bc + 2ac$$

2) Sume remarcabile

$$1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + n^3 = \left[\frac{n(n+1)}{2} \right]^2$$

3) Funcția de gradul al II-lea

$$f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}, f(x) = ax^2 + bx + c$$

Graficul funcției este o parabolă cu vârful $V\left(-\frac{b}{2a}; -\frac{\Delta}{4a}\right)$, $\Delta = b^2 - 4ac$

Dacă $a > 0$ valoarea minimă a funcției este $f_{min} = -\frac{\Delta}{4a}$

Dacă $a < 0$ valoarea maximă a funcției este $f_{max} = -\frac{\Delta}{4a}$

$G_f \cap Ox: f(x) = 0 \Rightarrow A_i(x_i; 0)$, unde $i = \overline{1; n}$, unde n reprezintă nr. de rădăcini a ecuației $f(x) = 0$

$G_f \cap Oy: f(0) \Rightarrow B(0; f(0))$

$A(a; b) \in G_f \Leftrightarrow f(a) = b$

4) Ecuația de gradul al II-lea

$$ax^2 + bx + c = 0$$

$$\Delta > 0 \Rightarrow x_1, x_2 = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$$

$$\Delta = 0 \Rightarrow x_1 = x_2 = -\frac{b}{2a}$$

$\Delta < 0 \Rightarrow$ ecuația nu are rădăcini reale sau $x_1, x_2 = \frac{-b \pm i\sqrt{\Delta}}{2a}$, unde $i^2 = -1$

Descompunerea în factori: $ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$

$$\text{Relațiile lui Viete: } \begin{cases} S = x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} \\ P = x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a} \end{cases}$$

5) Progresii aritmetice

O progresie aritmetică este determinată dacă i se cunoaște primul termen a_1 și rația r .

Formula termenului general: $a_n = a_1 + (n - 1)r$

Suma primilor n termeni: $S_n = \frac{n(a_1 + a_n)}{2}$

Condiția ca trei termeni a, b, c să fie în progresie aritmetică este $b = \frac{a+c}{2}$, (orice termen începând cu al doilea, este medie aritmetică a termenilor vecini lui)

6) Progresii geometrice

O progresie geometrică este determinată dacă i se cunoaște primul termen b_1 și rația q .

Formula termenului general: $b_n = b_1 \cdot q^{n-1}$

Suma primilor n termeni: $S_n = \frac{b_1 \cdot (q^n - 1)}{q - 1}, q \neq 1$

Condiția ca trei termeni a, b, c să fie în progresie geometrică este $b^2 = a \cdot c$

7) Numere complexe

$z = a + bi$ – forma algebrică a unui număr complex;

Partea reală a lui z : $Re(z) = a$;

Coeficientul părții imaginare: $Im(z) = b$

$\bar{z} = a - bi$ – conjugatul numărului complex z . $i^2 = -1$

$z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ – forma trigonometrică a unui număr complex

$r = |z| = \sqrt{a^2 + b^2}$ – modulul numărului complex z .

$\varphi \in [0; 2\pi)$ – argumentul redus al numărului complex z și se află din ecuația: $tg\varphi = \frac{b}{a}$

$(\cos\varphi + i\sin\varphi)^n = \cos n\varphi + i\sin n\varphi$ – formula lui Moivre

$z_k = \sqrt[n]{r} \left(\cos \frac{\varphi + 2k\pi}{n} + i\sin \frac{\varphi + 2k\pi}{n} \right), k = \overline{0; n-1}$ – rădăcinile de ordinul n ale lui z .

8) Metode de numărare

$n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot n$

Fie A și B două mulțimi finite și $f: A \rightarrow B$, $CardA = n$, $CardB = m$.

Numărul funcțiilor $f: A \rightarrow B$ este m^n .

Numărul funcțiilor injective este $A_n^m, m \geq n$

Numărul funcțiilor bijective este $\begin{cases} n!, m = n \\ 0, m \neq n \end{cases}$

$P_n = n!$

$A_n^k = \frac{n!}{(n-k)!}$ – calculează numărul de submulțimi ordonate cu k elemente ale unei mulțimi cu n elemente

(de ex. câte numere de două cifre diferite se pot forma cu cifrele 1, 2, 3, 4, 5)

$C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}$ – calculează numărul de submulțimi cu k elemente ale unei mulțimi cu n elemente

(de ex. câte submulțimi cu două elemente are o mulțime cu cinci elemente)

$C_n^k = C_n^{n-k}$ – formula combinărilor complementare

$C_n^0 + C_n^1 + C_n^2 + \dots + C_n^n = 2^n$ – nr. tuturor submulțimilor unei mulțimi cu n elemente

Binomul lui Newton:

$(a + b)^n = C_n^0 a^n + C_n^1 a^{n-1} b + C_n^2 a^{n-2} b^2 + \dots + C_n^k a^{n-k} b^k + \dots + C_n^n b^n$

$T_{k+1} = C_n^k a^{n-k} b^k$ – formula termenului general din binomul lui Newton

9) Matematici financiare

$p\%$ din $x \Leftrightarrow \frac{p}{100} \cdot x$

$p\%$ din x este $y \Leftrightarrow \frac{p}{100} \cdot x = y$

Un produs care costă S lei se ieftinește cu $p\%$. După ieftinire: $S - \frac{p}{100} \cdot S$

Un produs care costă S lei se scumpește cu $p\%$. După scumpire: $S + \frac{p}{100} \cdot S$

Dobânda simplă: $D = \frac{S \cdot p \cdot n}{100}$, unde S – suma inițială, p – procentul anual al dobânzii, n – nr de ani pe care s-a depus suma.

Dobânda compusă: la sfârșitul unei perioade determinate (în general un an) dobânda se adaugă capitalului pentru a produce o nouă dobândă

$S_n = S(1 + p)^n$ – suma totală după n ani.

Probabilitatea unui eveniment: $P = \frac{nr \text{ cazurilor favorabile}}{nr \text{ cazurilor posibile}}$

10) Funcția exponențială

$$f: \mathbf{R} \rightarrow (0; \infty), f(x) = a^x, a > 0, a \neq 1$$

$$f(0) = 1$$

$$a^x \cdot a^y = a^{x+y} \quad a^x : a^y = a^{x-y} \quad (a^x)^y = a^{x \cdot y}$$

11) Funcția logaritmică

$$f: (0; \infty) \rightarrow \mathbf{R}, f(x) = \log_a x, a > 0, a \neq 1$$

$\ln x$ – logaritm natural din x (în baza e), unde $e \approx 2,7182 \dots$

$$\log_a x = y \Leftrightarrow x = a^y \quad \log_a 1 = 0 \quad \log_a a = 1$$

$$\log_a (x \cdot y) = \log_a x + \log_a y \quad \log_a \frac{x}{y} = \log_a x - \log_a y \quad \log_a x^n = n \log_a x$$

$$\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a} \quad \log_a b = \frac{1}{\log_b a}$$

12) Compunerea funcțiilor

$$f: A \rightarrow B, g: B \rightarrow C \Rightarrow h: A \rightarrow C, h(x) = (g \circ f)(x) = g(f(x))$$

Prof. Sorin Madura